

·成果简介·

非线性 Hamilton 系统的周期解与其指标理论

龙以明

(南开大学南开数学研究所,天津 300071)

[关键词] Hamilton 系统, Maslov 型指标理论, ω 指标理论, Bott 型迭代公式, 周期解, 最小周期, 稳定性, 不稳定区域。

近年来我们在非线性 Hamilton 系统和辛几何方面开展了深入系统的研究工作, 系统地推广了由美国数学家 C. Conley 和瑞士数学家 E. Zehnder 对高维非退化情形所定义的指标理论, 完整定义了 Maslov 型指标理论, 建立了其迭代理论, 为一般 Hamilton 系统的 Morse 理论方法研究奠定了基础, 在周期轨道的存在性、多重性、最小周期、稳定性等方面, 获得了一系列有重要意义的研究成果。

1978 年, 美国数学家 P. Rabinowitz 利用变分方法证明了 Hamilton 系统周期解的存在性。但此方法得到的周期解一般未必具有给定的最小周期。P. Rabinowitz, 1978 年提出了关于超二次 Hamilton 系统是否存在最小周期解的猜想。在我们的工作之前, 关于此最小周期解猜想的所有工作都对势函数附加了进一步的条件。这些工作分为两类: 大多作者要求势函数是凸的, 进而应用 Morse 理论来研究这一问题; 也有个别作者要求势函数非常接近于单项式, 进而应用先验估计方法来研究这一问题。近来, 我们对 \mathbf{R}^n 上的超二次二阶 Hamilton 系统证明了对任意给定的周期 τ , 该系统必有一个偶的非常值的 τ 周期解, 其最小周期不小于 $\tau/(n+1)$ 。这一定理是恰在 Rabinowitz 猜想的原来条件下所获得的第一个结果。在证明中, 我们对非凸系统的 Rabinowitz 猜想首次应用了 Morse 理论方法, 为研究这一类问题提供了一个新的途径。对具有双偶次二次位势的二阶 Hamilton 系统的最小周期解问题, 我们也获得了有意义的成果^[1,3,6]。

对于一阶 Hamilton 系统, 因其 Morse 指标总是无穷的, 这对经典 Morse 理论的应用造成了实质性的困难。自 1984 年—1990 年, 关于此类系统的指标理论首先由 C. Conley 和 E. Zehnder 对空间维数不小于 4 且非退化的辛道路所定义。作者与 E. Zehnder 合作, 将这一指标理论推广到了空间维数为 2 的非退化的情形, 随后作者又把这一理论推广到了退化 Hamilton 系统的情形。最近, 作者又进一步把这一理论推广到了任意辛道路并给出了此指标理论的公理化特征。本文称这一指标理论为 Maslov 型指标理论。它为非线性 Hamilton 系统

$$\dot{x} = JH'(t, x) \quad (1)$$

国家自然科学基金重点项目, 批准号 19231201。

本文于 1997 年 10 月 31 日收到。

的每一个 τ 周期解 x 配备了一对整数 $(i_\tau(x), \nu_\tau(x))$ 。我们特别指出, 这里关于相应 Hamilton 函数 $H: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}$ 的要求仅为其沿该解的轨道为二阶连续可微且关于时间 t 为 τ 周期的, 而不必要求是凸的, 这就使得这一理论具有了广阔的应用领域。Maslov 型指标可以被视为 Morse 指标的一个有限表示, 而使得 Morse 理论在 Hamilton 系统上的应用成为可能。

为了进一步利用 Maslov 型指标理论来研究非线性 Hamilton 系统的周期解的各种性质和从几何上区分不同的周期轨道, 我们系统地研究了 Maslov 型指标理论的迭代性质。1993 年, 我们首先研究和建立了 Hamilton 系统的非退化周期解的 Maslov 型指标的迭代公式, 并给出了退化周期解的 Maslov 型指标的迭代估计式。然后, 我们进一步研究和建立了退化周期解的 Maslov 型指标的迭代公式, 给出了相应迭代 Maslov 型指标的渐近估计。最近, 通过系统研究辛矩阵的正规形式, 辛群的奇异子集的拓扑性质, Maslov 型指标理论的同伦不变性定理及其逆定理, 作者引进并建立了新的 ω 指标理论。对复平面的单位圆周上的任意复数 ω , 这一指标理论为非线性 Hamilton 系统 (1) 的每一个 τ 周期解 x 配备了一对整数 $(i_\tau, \omega(x), \nu_\tau, \omega(x))$ 。这一理论为 Maslov 型指标迭代理论的研究奠定了基础。据此, 作者证明了 Maslov 型指标理论的 Bott 型迭代公式:

$$i_{m\tau}(x^m) = \sum_{\omega^m=1} i_{\tau, \omega}(x) \quad \nu_{m\tau}(x^m) = \sum_{\omega^m=1} \nu_{\tau, \omega}(x) \quad (2)$$

利用 Bott 型迭代公式, 又定义了 Hamilton 系统 (1) 的 τ 周期解 x 的平均指标 $\hat{i}_\tau(x)$ 。据此, 我们进一步证明了任意辛道路的 Maslov 型指标的迭代公式和迭代 Maslov 型指标的最佳增长估计式

$$m\hat{i}_\tau(x) - n \leq i_{m\tau}(x^m) \leq m\hat{i}_\tau(x) + n - \nu_{m\tau}(x^m) \quad \forall m = 1, 2, \dots \quad (3)$$

这里, (2) 和 (3) 均对 Hamilton 函数 H 无任何凸性要求。我们的方法与前人相当不同。我们的这些成果推广了美国数学家 R. Bott 与法国数学家 I. Ekeland 等人的关于闭测地线和凸 Hamilton 系统的工作。我们关于 Maslov 型指标的迭代理论的成果为非线性 Hamilton 系统研究中 Morse 理论的进一步应用奠定了基础, 特别为变分方法所获周期解的存在性、最小周期、多重性、稳定性等的研究提供了一个有力的工具^[5,7,9]。

利用上面提到的 Maslov 型指标的迭代理论, 我们为估计非线性一阶 Hamilton 系统的周期解的最小周期引进了一个新的方法, 即 Maslov 型指标迭代估计方法。利用这一方法, 我们在关于一阶 Hamilton 系统的具有给定最小周期的周期解的存在性的 Rabinowitz 猜想的研究中获得了新进展。我们特别证明了: 若 x 为 \mathbf{R}^{2n} 上的非线性自治 Hamilton 系统之一 τ 周期解, 其最小周期为 τ/k 。设其作为 τ 周期解的 Maslov 型指标 $i_\tau(x) \leq n+1$, 作为 τ/k 周期解的 Maslov 型指标 $i_{\tau/k}(x) \geq n$, 则 $k=1$, 即 τ 为其最小周期。这一成果推广了在凸性条件下关于 Rabinowitz 最小周期解猜想的迄今国际上的所有成果, 揭示了凸系统的周期解的最小周期与 Maslov 型指标的内在联系。我们引进的这一方法最近已被用于非凸 Hamilton 系统次调和解的多重性的研究中^[5]。

利用前面提到的迭代 Maslov 型指标的估计式, 对偶数维空间中给定的星型曲面, 我们证明了闭特征的平均指标是其几何不变量而与 Hamilton 函数的选取无关。我们先后对凸曲面和星型曲面证明了其上或存在无穷多个双曲闭特征, 其最小周期趋于无穷, 或存在至少一个非双曲的闭特征。这是关于非凸超曲面上的闭特征的稳定性的第一个结果, 它揭示了 Maslov

型指标及其迭代理论在变分解的稳定性研究中的重要作用^[10,11]。

不稳定线性 Hamilton 系统的同伦分类问题与变分法中的最小解问题密切相关,是数学物理学研究中的一个经典问题。利用 Maslov 型指标和辛矩阵的双曲指标,我们引进了不稳定线性 Hamilton 系统的指标理论。利用双曲辛矩阵集的拓扑结构,我们证明了这一指标理论完全刻划了不稳定线性 Hamilton 系统的同伦分类问题,并据此推广了法国数学家 H. Poincaré 关于变分法的最小解的一个定理。我们的这一结果纠正了此前国际上在该问题研究中的错误的分类方法^[8]。

有理由相信,我们建立的 Maslov 型指标的迭代理论会在非线性 hamilton 系统与辛几何的研究中发挥更大的作用。

我们还构造了 Hamilton 微分同胚群在 Hofer 度量下的由非自治 Hamilton 系统生成的测地线的第一个例子。近年来,我们在给定能量的多个闸轨道的存在性及环面上的 Weinstein 猜想等课题的研究中,也获得了新的有意义的成果^[2,4]。

参 考 文 献

- [1] Long Y. The minimal period problem of periodic solutions for autonomous superquadratic second order Hamiltonian systems. *J. Diff. Equations*, 1994, **111**: 744 - 174.
- [2] Long Y, Zehnder E. Remarks on isoenergetic periodic orbits in tori. *Advances in dynamical systems and quantum physics*, (Capri, 1993), World Sci., 1995, 326 - 344.
- [3] Long Y. Nonlinear oscillations for classical Hamiltonian systems with bi-even subquadratic potentials. *Nonlinear Analysis, T. M. A.*, 1995, **24**: 1665 - 1671.
- [4] Long Y. Geodesics in the compactly supported Hamiltonian diffeomorphism group. *Math. Z.*, 1995, **220**: 279 - 294.
- [5] Dong D, Long Y. The iteration formula of Maslov-type index theory with applications to nonlinear Hamiltonian systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1997, **349**: 2619 - 2661.
- [6] Long Y. On the minimal period for periodic solutions of nonlinear Hamiltonian systems. *Chinese Ann. Math.*, 1997, **18B**: 481 - 484.
- [7] Long Y. Bott formula of the Maslov-type index theory. Preprint 1995. 南开数学研究所研究报告, No. 1996-M-001. Revised 1997. *Pacific J. Math.*
- [8] Long Y, An T. Indexing the domains of instability for Hamiltonian systems. *Nonlinear Diff. Equa. Appl.*
- [9] 刘春根, 龙以明. Maslov 型迭代指标的一个最佳增长估计. *科学通报*. 1997, **42**: 2275 - 2277.
- [10] Long Y. Hyperbolic closed characteristics on compact convex smooth hypersurfaces in \mathbb{R}^{2n} . *J. Diff. Equa.*
- [11] Liu C, Long Y. Hyperbolic characteristics on star-shaped hypersurfaces. *Ann. IHP. Anal. nonlineaire*.

PERIODIC SOLUTIONS OF NONLINEAR HAMILTON SYSTEMS AND THEIR INDEX THEORY

Long Yiming

(Nankai Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin 300071)

Key words Hamilton systems, Maslov-type index theory, ω -index theory, Bott-type iteration formulae, periodic solutions, minimal period, stability, unstable domain